Konsep dan Penerapan Kombinatorial dalam Permainan Tents and Trees

Andrew - 13519036
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13519036@std.stei.itb.ac.id

***Abstraksi*—Kombinatorial adalah pencarian jumlah kemungkinan tanpa mengenumerasi setiap kemungkinannya. Terdapat banyak penerapan kombinatorial dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah permainan Tents and Trees. Kita dapat melihat konsep dan penerapan kombinatorial dalam permainan ini.**

***Kata Kunci*—Kombinatorial, Kombinasi, Tents and Trees**

I. PENDAHULUAN

Puzzle adalah sebuah permainan atau permasalahan yang dibuat untuk mengasah pemikiran. Puzzle biasanya disajikan dengan kesulitan yang beragam dan membutuhkan kesabaran yang beragam pula. Contoh-contoh puzzle yang cukup dikenal oleh masyarakat umum adalah Rubik's Cube, Sudoku, Minesweeper, Jigsaw, dll. Salah satu puzzle yang cukup menarik namun kurang terkenal adalah Tents and Trees. Dalam makalah ini, penulis akan menyajikan konsep kombinatorial dan penerapannya dalam penyelesaian puzzle Tents and Trees.

II. KOMBINATORIAL

Kombinatorial adalah sebuah cabang matematika diskrit yang mempelajari tentang penghitungan penyusunan objek-objek tanpa mengenumerasi semua kemungkinan susunannya [2]. Kaidah dasar yang menyusun perhitungan kombinatorial adalah kaidah penjumlahan (rule of sum) dan kaidah perkalian (rule of product). Kombinatorial terdiri dua prinsip, yaitu permutasi dan kombinasi. Permutasi adalah jumlah penyusunan berbeda dalam pengaturan objek-objek. Dalam penyusunannya, permutasi memperhatikan urutan penyusunan objek-objek tersebut. Berbeda dengan permutasi, kombinasi adalah pengaturan objek-objek yang tidak memperhatikan urutan penyusunan objek-objeknya. Di dalam kombinatorial, terdapat juga prinsip Inklusi-Ekslusi.

A. Rule of Sum

Sesuai namanya, Rule of Sum adalah kaidah penjumlahan. Jika kita memiliki dua percobaan, percobaan pertama memberikan p hasil, percobaan kedua memberikan q hasil, maka berdasarkan Rule of Sum, jika diminta hasil percobaan pertama atau percobaan kedua, hasil tersebut akan memberikan p + q hasil.

Sebagai contoh, di dalam sebuah kelas terdapat 5 pria dan 5 wanita. Banyak kemungkinan pemilihan satu orang perwakilan dari kelas tersebut adalah 5 + 5 = 10 kemungkinan.

B. Rule of Product

Rule of Product adalah kaidah perkalian. Jika kita memiliki dua percobaan, percobaan pertama memberikan p hasil, percobaan kedua memberikan q hasil, maka berdasarkan Rule of Product, jika diminta hasil percobaan pertama dan hasil percobaan kedua, hasil tersebut akan memberikan p × q hasil.

Sebagai contoh, di dalam sebuah kelas terdapat 5 pria dan 5 wanita. Banyak kemungkinan untuk memilih satu perwakilan pria dan satu perwakilan wanita adalah 5 × 5 = 25 kemungkinan.

C. Permutasi n Objek

Secara definisi, permutasi dari n buah objek adalah hasil kaidah perkalian dari penyusunan kemungkinan objek-objeknya. Jika terdapat n objek, urutan pertama dipilih dari n objek, urutan kedua dipilih dari n-1 objek, dan seterusnya sampai dengan urutan terakhir yang dipilih dari 1 buah objek.

Permutasi dari n buah objek adalah

$$P(n) = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1) = n!$$

Sebagai contoh, di dalam sebuah kelas terdapat 5 mahasiswa. Banyak cara untuk mengurutkan nama-nama mahasiswa tersebut adalah P(5) = 5! = 120 cara.

D. Permutasi r Elemen dari n Objek

Secara definisi, permutasi r elemen dari n buah objek adalah hasil kaidah perkalian dari penyusunan kemungkinan objek-objeknya, yang dibatasi sebanyak r buah. Jika terdapat n objek, urutan pertama dipilih dari n objek, urutan kedua dipilih dari n-1 objek, dan pengambilan urutan dilakukan sebanyak r kali.

Permutasi r elemen dari n buah objek adalah

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots\big(n-(r-1)\big) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Sebagai contoh, di dalam sebuah kelas terdapat 5 mahasiswa. Banyak cara untuk memilih ketua kelas dan wakil ketua kelas dari mahasiswa tersebut adalah P(5,2) = 20 cara.

E. Kombinasi r Elemen dari n Objek

Secara definisi, kombinasi r elemen dari n buah objek adalah hasil kaidah perkalian dari penyusunan kemungkinan objek-objeknya yang dibatasi sebanyak r buah, dan tidak memperhitungkan urutan pengambilannya.

Kombinasi r elemen dari n objek adalah

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Sebagai contoh, di dalam sebuah kelas terdapat 5 mahasiswa. Banyak cara untuk memilih dua orang perwakilan dari mahasiswa tersebut adalah C(5,2) = 10 cara.

F. Kombinasi dengan Pengulangan

Misalkan terdapat r buah elemen yang sama dan terdapat n buah kontainer. Terdapat dua kasus yang dapat ditinjau dari permasalahan tersebut. Pertama, jika setiap kontainer hanya dapat menampung satu buah elemen, maka cara penyusunannya adalah

$$C(n,r)$$

Kedua, jika setiap kontainer boleh menyimpan lebih dari satu buah elemen, maka cara penyusunannya adalah

$$C(n+r-1,r)$$

Sebagai contoh, di dalam sebuah kelas terdapat 5 mahasiswa. Banyak cara untuk memasukkan mahasiswa tersebut ke dalam dua kelompok yang tidak dibatasi minimum dan maksimumnya adalah C(2+5-1,5) = C(6,5) = 6 cara.

G. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Prinsip Inklusi-Eksklusi adalah prinsip himpunan dengan rumus

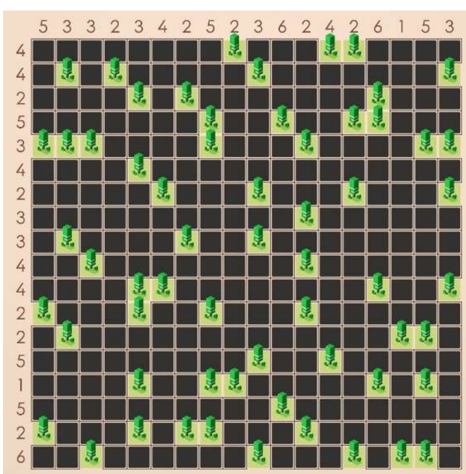
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Sebagai contoh, terdapat sebuah bilangan binary sebesar 4 bit. Untuk menghitung jumlah bilangan yang memiliki bit 1 di awal atau bit 1 di akhir, kita perlu terlebih dahulu menghitung jumlah bilangan dengan bit 1 yang berada di awal, jumlah bilangan dengan bit 1 yang berada di akhir,dan jumlah bilangan dengan bit 1 yang berada di awal dan di akhir. Jadi, banyak bilangan dengan bit 1 berada di awal atau di akhir adalah

$$2^3 + 2^3 - 2^2 = 12\ bilangan$$

III. TENTS AND TREES

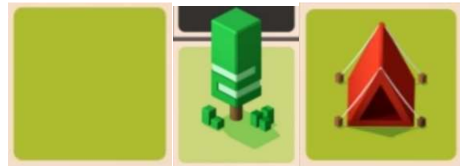
Sesuai namanya, Tents and Trees adalah game puzzle yang terdiri dari tenda dan pohon. Tidak ada sumber pasti yang menyebutkan kapan permainan ini diciptakan.



Gambar 1 Permainan Tents and Trees

Permainan ini memiliki beberapa atribut-atribut, yaitu:

1. Pohon, yang mengindikasikan puzzle.
2. Tenda dan rumput, yang mengindikasikan jawaban.
3. Kotak kosong, yang mengindikasikan tempat kita meletakkan tenda.
4. Angka dipinggir kotak puzzle, yang mengindikasikan jumlah tenda yang harus diletakkan di setiap baris dan kolomnya.



Gambar 2 Rumput, Pohon, dan Tenda

Aturan-aturan di dalam permainan ini adalah:

1. Setiap tenda diletakkan disamping pohon.
2. Setiap tenda diletakkan sesuai dengan jumlah angka yang berkorespondensi terhadap baris atau kolomnya.
3. Setiap tenda tidak boleh berdekatan.

Permainan ini dapat bervariasi dalam ukuran. Sebagai acuan, di dalam aplikasi Tents and Trees Puzzles, terdapat puzzle yang berukuran mulai dari 5x5 sampai dengan 22x22.

IV. KONSEP KOMBINATORIAL DALAM TENTS AND TREES

Di dalam permainan Tents and Trees, dapat diamati bahwa setiap baris dan kolom memiliki sejumlah kotak kosong dan angka di bagian pinggir puzzle. Kotak-kotak kosong dapat dianalogikan sebagai n dan angka-angka di bagian pinggir puzzle dapat dianalogikan sebagai r. Dengan demikian, kita memiliki n buah kotak dan r buah tenda yang akan disusun ke dalam kotak.

Sebagai contoh, perhatikan gambar 3 di bawah ini. Pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa terdapat 3 kotak yang belum diisi oleh apapun, dan terdapat 1 tenda untuk mengisi salah satu dari ketiga kotak tersebut. Dengan demikian, banyaknya cara untuk mengisi 3 kotak dengan 1 tenda adalah

$$C(3,1) = \frac{3!}{1!\,2!} = 3\ cara$$

Gambar 3 Salah satu baris pada Tents and Trees

Prinsip Inklusi-Eksklusi juga dapat ditemukan di dalam Tents and Trees. Sebagai contoh, perhatikan gambar 4. Pada gambar 4(a), dapat dilihat bahwa baris kedua memiliki 5 buah kotak kosong dan tiga buah tenda untuk diisi. Namun, setelah pengisian tenda di baris pertama, jumlah kotak yang dapat diisi berkurang menjadi 4 buah. Maka, banyak cara untuk mengisikan tiga tenda tersebut adalah

$$C(5,3) - C(4,2) = \frac{5!}{3!\,2!} - \frac{4!}{2!\,2!} = 4\ cara$$

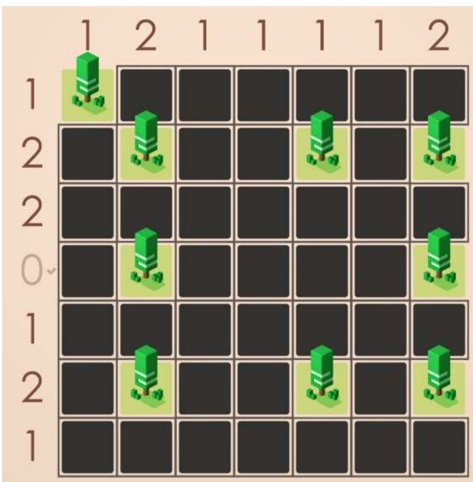
(a)

(b)

Gambar 4 (a) Kondisi puzzle sebelum pengisian tenda
(b) Kondisi puzzle setelah pengisian tenda

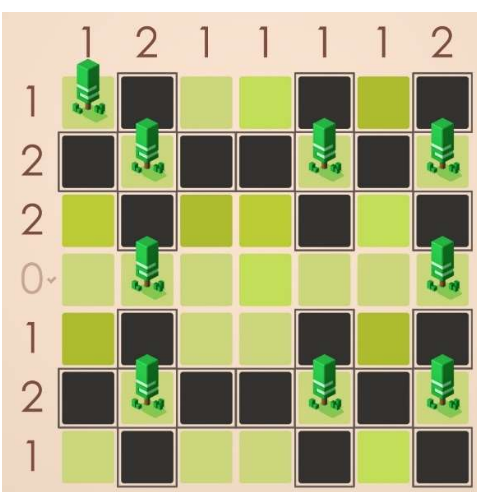
IV. PENYELESAIAN TENTS AND TREES DENGAN KOMBINATORIAL

Penggunaan kombinatorial di dalam penyelesaian Tents and Trees adalah mencari penyusunan tenda yang paling efektif ke dalam pohon. Gambar 5 berikut adalah puzzle Tents and Trees 7x7 yang akan kita selesaikan.



Gambar 5 Tents and Trees 7x7

Secara aturan, setiap tenda diletakkan di samping pohon. Oleh karena itu, kita dapat mengisi kotak-kotak yang tidak mungkin diisi oleh tenda dengan rumput. Perhatikan bahwa pada baris ketiga, jumlah kotak yang harus diisi oleh tenda adalah 0, sehingga kita dapat mengisi seluruh baris tersebut dengan rumput.

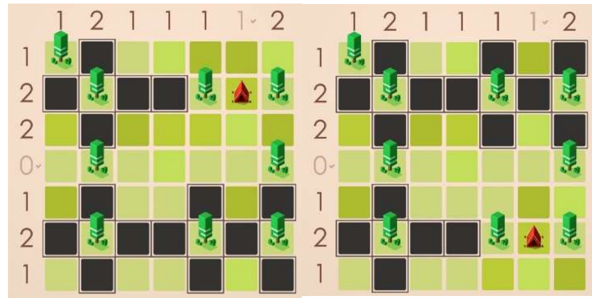


Gambar 6 Penyelesaian langkah pertama

Perhatikan kolom keenam. Kita dapat mengisi 1 tenda dari 2 kotak yang tersedia, maka banyaknya cara pengisian tenda adalah

$$C(2,1) = \frac{2!}{1!\,1!} = 2\ cara$$

Enumerasi kedua cara tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 7 Enumerasi dua cara pengisian tenda

Perhatikan bahwa di dalam kedua cara tersebut, kotak yang berada di sekeliling tenda diisi dengan rumput. Hal ini disebabkan oleh aturan ketiga permainan ini, yaitu setiap tenda tidak boleh berdekatan.

Mari kita tinjau cara pertama, yaitu meletakkan tenda di baris kedua kolom keenam (selanjutnya akan ditulis sebagai (2,6)). Sebelum pengisian tenda di (2,6), baris ketiga memiliki dua buah tenda yang akan disusun ke dalam tiga buah kotak. Banyak cara penyusunannya adalah

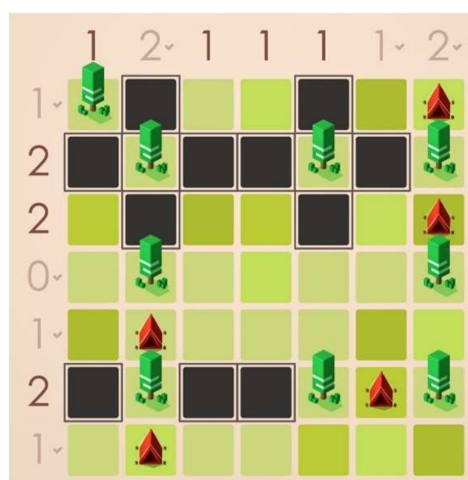
$$C(3,2) = \frac{3!}{2!\,1!} = 3\ cara$$

Namun, setelah (2,6) diisi oleh tenda, (3,5) dan (3,7) harus diisi dengan rumput. Akibatnya, jumlah kotak yang tersedia tersisa 1. Hal ini tidak memungkinkan pengisian dua tenda ke dalam satu kotak.

$$C(1,2) = \frac{1!}{2!\,(-1)!} = ??$$

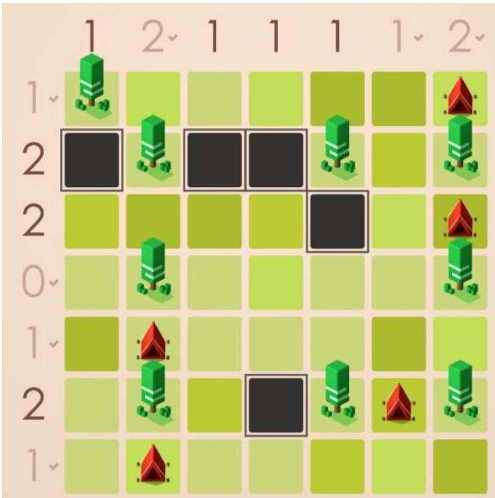
Maka, cara pertama bukan cara yang tepat.

Mari kita tinjau cara kedua, yaitu meletakkan tenda di (6,6). Kita dapat melihat bahwa pada baris kelima, baris ketujuh, dan kolom ketujuh, jumlah tenda yang harus diisi dan jumlah kotak yang tersedia berjumlah sama, sehingga kita dapat mengisi kotak-kotak tersebut dengan tenda.



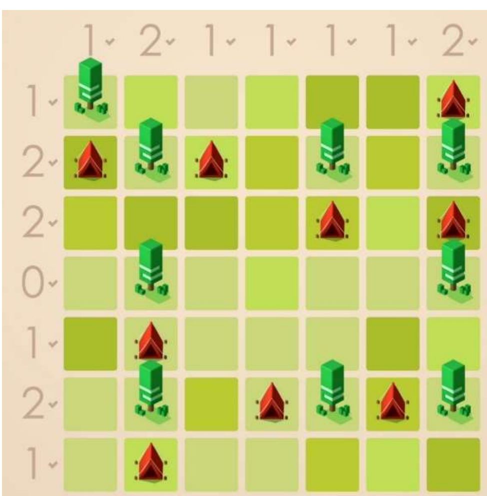
Gambar 8 Penyelesaian langkah kedua

Perhatikan bahwa pada baris pertama, kolom kedua, dan kolom keenam, syarat jumlah tenda yang harus diisi telah dipenuhi, maka kita dapat mengisi kotak-kotak yang tersisa dengan rumput. Perhatikan juga bahwa (6,1) dan (6,3) berdekatan dengan tenda, sehingga kotak tersebut tidak mungkin diisi dengan tenda.



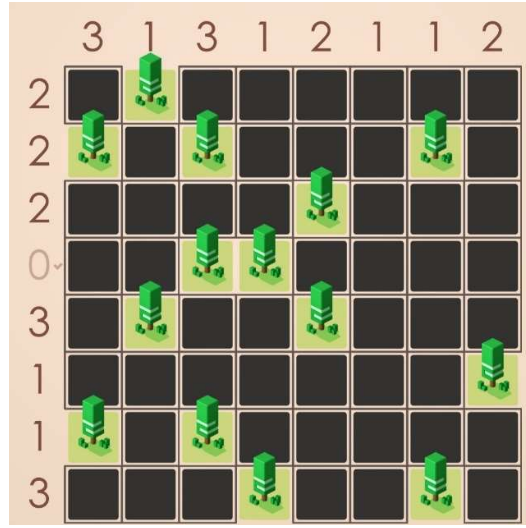
Gambar 9 Penyelesaian langkah ketiga

Dengan mengikuti petunjuk-petunjuk yang tersisa, kita dapat menyelesaikan puzzle tersebut dengan mudah. Hasil penyelesaian puzzle ini dapat dilihat di Gambar 10.



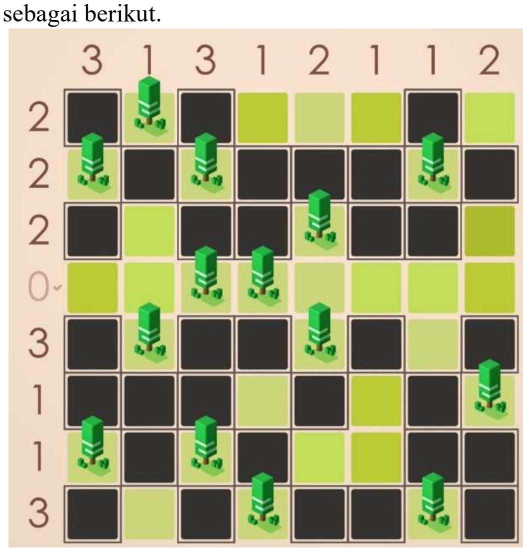
Gambar 10 Solved Tents and Trees

Sekarang kita akan mencoba menyelesaikan puzzle Tents and Trees berukuran 8x8. Perhatikan Gambar 11.



Gambar 11 Tents and Trees 8x8

Dengan mengikuti langkah yang sama dengan saat kita mengerjakan puzzle Tents and Trees 7x7, kita mendapatkan hasil sebagai berikut.

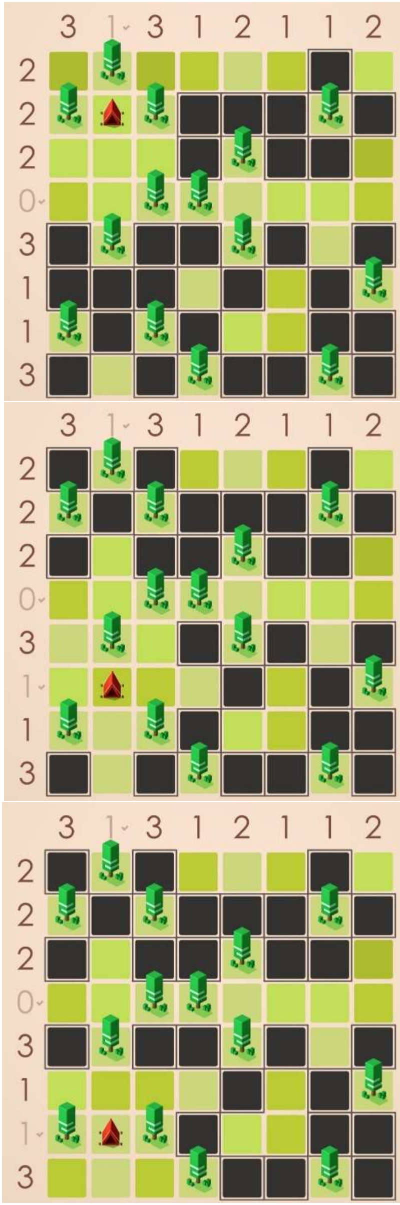


Gambar 12 Penyelesaian langkah pertama

Perhatikan bahwa pada kolom kedua, terdapat 3 kotak yang dapat diisi oleh 1 tenda. Banyak cara pengisian tenda ke dalam kotak adalah

$$C(3,1) = \frac{3!}{1!\,2!} = 3\ cara$$

Enumerasi ketiga cara adalah sebagai berikut.



Gambar 13 Enumerasi tiga cara pengisian tenda

Mari kita tinjau cara pertama, yaitu meletakkan tenda di (2,2). Perhatikan kolom pertama. Sebelum pengisian tenda di (2,2), terdapat 5 kotak dan 3 tenda. Maka banyak cara pengisian tenda ke dalam kotak-kotak tersebut adalah

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!\,2!} = 10\ cara$$

Namun, setelah pengisian tenda di (2,2), banyak kotak yang tersisa adalah 3 buah. Hal ini tetap memungkinkan pengisian 3 tenda ke dalam 3 kotak. Namun, hal ini bertentangan dengan aturan ketiga permainan ini, yaitu setiap tenda tidak boleh berdekatan. Hal yang sama juga terjadi untuk kolom ketiga. Dengan demikian, cara pertama bukanlah cara yang tepat untuk menyelesaikan puzzle tersebut.

Sekarang, mari kita tinjau cara ketiga, yaitu meletakkan tenda di (7,2). Perhatikan baris kedelapan. Sebelum pengisian tenda di (7,2), terdapat 5 kotak dan 3 tenda. Maka banyak cara pengisian tenda ke dalam kotak-kotak tersebut adalah

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!\,2!} = 10\ cara$$

Namun, setelah pengisian tenda di (7,2), banyak kotak yang tersisa adalah 3 buah. Sama seperti kegagalan pada cara pertama, pengisian 3 tenda ke dalam 3 kotak akan bertentangan dengan aturan ketiga karena terdapat dua kotak yang berdekatan, yaitu (8,5) dan (8,6). Dengan demikian, cara ketiga bukanlah cara yang tepat untuk menyelesaikan puzzle tersebut.

Dengan mengeliminasi semua cara yang tidak tepat, kita mendapatkan bahwa cara kedua adalah cara yang tepat untuk menyelesaikan puzzle tersebut.

Gambar 14 Penyelesaian setelah mengeliminasi cara yang tidak tepat

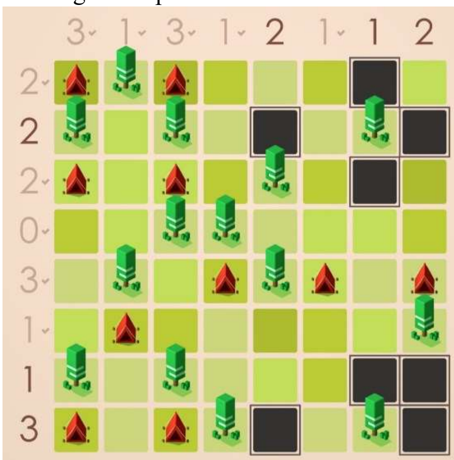
Perhatikan bahwa setelah pengisian tenda di (6,2), kita mendapatkan baris kelima, kolom pertama, dan kolom ketiga memiliki masing-masing 3 kotak dan 3 tenda. Banyak cara pengisian tenda ke dalam kotak untuk masing-masing baris dan kolom adalah

$$C(3,3) = \frac{3!}{3!\,0!} = 1\ cara$$

Karena hanya terdapat 1 cara, maka kita dapat mengisikan tenda-tenda tersebut ke dalam kotak-kotak yang berkorespondensi.

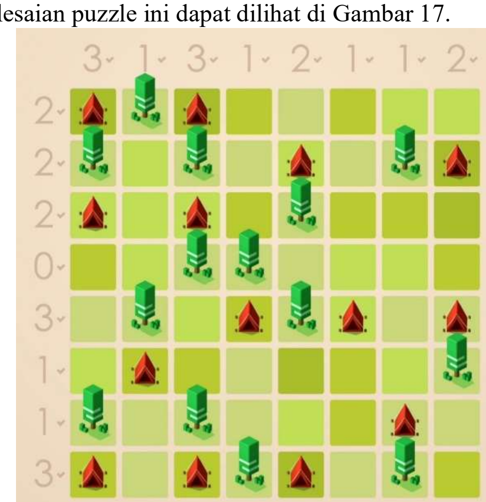
Gambar 15 Penyelesaian langkah kedua

Perhatikan bahwa syarat pada kolom keempat dan kolom keenam sudah langsung terpenuhi, maka kita bisa mengisi kotak yang tersisa dengan rumput.



Gambar 16 Penyelesaian langkah ketiga

Dengan mengikuti petunjuk-petunjuk yang tersisa, kita dapat menyelesaikan puzzle tersebut dengan mudah. Hasil penyelesaian puzzle ini dapat dilihat di Gambar 17.



Gambar 17 Solved Tents and Trees

V. KESIMPULAN

Kombinatorial memiliki berbagai penerapan di dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah penyelesaian permainan Tents and Trees. Meskipun kita dapat menggunakan konsep kombinatorial dalam penyelesaian permainan ini, pendekatan logika umumnya lebih relevan dalam menyelesaikan permainan ini.

VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya pembuatan makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada setiap dosen pengampu mata kuliah IF2120 Matematika Diskrit, terutama kepada Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T. atas penyediaan website kuliah dan video kuliah online, dan kepada Dr. Nur Ulfa Maulidevi, M.T. atas bimbingan beliau dalam mengajar kelas K04. Tak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada setiap teman-teman yang telah memberikan saran dan masukan kepada penulis.

REFERENSI

[1] https://www.dictionary.com/browse/puzzle Diakses pada tanggal 6 Desember 2020.

[2] http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Kombinatorial-2020-Bagian1.pdf Diakses pada tanggal 6 Desember 2020.

[3] http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Kombinatorial-2020-Bagian2.pdf Diakses pada tanggal 6 Desember 2020.

[4] https://www.basjacobs.com/post/trees-and-tents/ Diakses pada tanggal 6 Desember 2020.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2020

Andrew
13519036